

Graphes

Les graphes sont utilisés en mathématiques appliquées pour simplifier la compréhension de tous types de réseaux.

Ce sont des représentations visuelles permettant de relier des objets entre eux, et de résoudre certains problèmes sur ces structures de données (*recherche de chemin par exemple*).

1.1 Problème 1 : Les sept ponts de Königsberg

Le problème des sept ponts de Königsberg est connu pour être à l'**origine de la topologie et de la théorie des graphes**. Résolu par Leonhard Euler en 1735, ce problème mathématique se présente de la façon suivante :

il y a une île appelée le *Kneiphof*, entourée d'un fleuve qui se partage en 2 bras. Les bras de ce fleuve sont garnis de 7 ponts

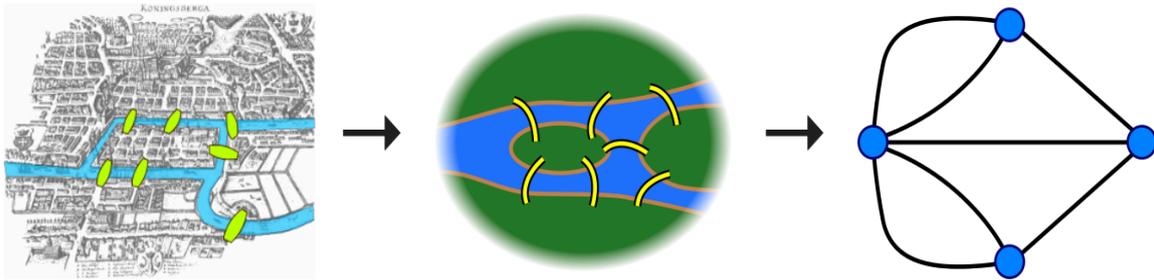


FIGURE 1 – les ponts de Königsberg

Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ.

Question : Cette promenade, est-elle possible ? Sinon, comment ajouter ou supprimer un-des pont-s pour que celle-ci soit réalisable ?

La théorie des graphes regroupe un ensemble de théorèmes et d'algorithmes visant à résoudre divers problèmes liés aux réseaux.

Euler propose ainsi une règle pour répondre au problème général de promenades sur des ponts : Un parcours eulérien est possible si, et seulement si, deux régions au plus ont un nombre impair de ponts y conduisant. Si deux régions ont un nombre impair de ponts y conduisant, le parcours commencera par l'une de ces deux régions.

1.2 Problème 2 : Réseau social

1. Quels renseignements fournit ce graphe d'un réseau social ? Personne la plus influente ? Temps de propagation d'une information ? Fragilité du réseau ?

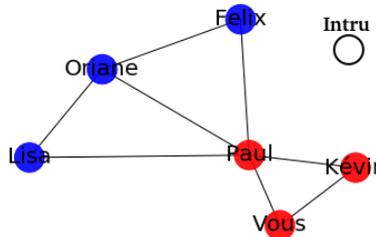


FIGURE 2 – Exemple de graphe non connexe

2. Sur l'image suivante, dessiner un graphe complet. Quelles nouvelles caractéristiques amène ce nouveau graphe ?

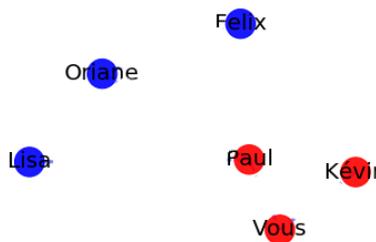


FIGURE 3 – ensemble de sommets

3. Représenter l'arbre couvrant de ce graphe :

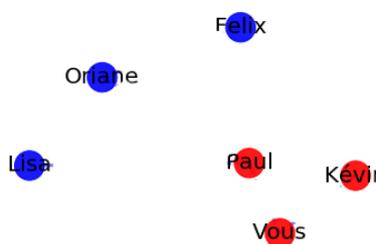


FIGURE 4 – ensemble de sommets

1.3 Problème 3 : Carte routière

1. Représenter le graphe pondéré représentant la carte des autoroutes du Sud-Est de la France.



	Perpignan	Narbonne	Montpellier	Nimes	Avignon	Marseille	Salon de Provence	Aix en Provence	Toulon	Avignon	Valence	Grenoble	Sisteron	Gap	Le Luc	Nice
Perpignan	0	69														
Narbonne	69	0	100													
Montpellier		100	0	54												
Nimes			54	0	50											
Avignon				50	0	104	54									
Marseille					104	0	51									
Salon de Provence					54	51	0	36								
Aix en Provence							36	0	83				103		85	
Toulon								83	0						57	
Avignon										0	130					
Valence										130	0	93				
Grenoble											93	0				
Sisteron								103					0	50		
Gap													50	0		
Le Luc								85	57						0	103
Nice															103	0

FIGURE 5 – autoroute et distance entre étapes

2. Quels sont les chemins pour effectuer le trajet Toulon-Grenoble? Ces chemins ne devront pas faire d’aller-retour sur une même portion de route, ni présenter de cycle.
3. Quel est le chemin le plus court pour effectuer le trajet Toulon-Grenoble?

Partie 2

Exercice

On rappelle que l’ordre d’un graphe est son nombre de sommets ($|V|$). La taille d’un graphe est son nombre d’arêtes ($|E|$). Le degré (ou la valence) d’un sommet est le nombre d’arêtes incidentes à ce sommet, où une boucle compte double.

Pour chacun des exemples précédents :

- Déterminer l’ordre du graphe
- la taille
- la densité
- le diamètre
- le degré maximum pour les sommets du graphe
- et donner des informations sur sa morphologie (connexe, orienté, complet, cyclique, pondéré).